液滴破碎方程的三种数值解法及分析比较

王日腾,李春晖,矫彩山*

哈尔滨工程大学,黑龙江哈尔滨 150001

摘要:介绍了求解群体平衡模型液滴破碎方程的三种数值方法:固定点法(fixed pivot technique,FPT), Attarakih 2004 法和单元平均法(cell averaged technique,CAT)。针对固定点法在第一区间数密度突变(值过低)的问题作了适当的修正,得到的结果与整体分布曲线及另两种方法的计算值很好地吻合。三种方法得到的常微分方程组均采用定步长的四阶龙格-库塔法求解,由C语言编写计算程序。计算结果表明,固定点法和 Attarakih 2004 法在区间宽度相同的情况下计算结果几乎完全吻合,单元平均法比上述两种方法有更高的精度和计算效率。

关键词:群体平衡模型;液滴破碎;数值方法 中图分类号:TL941.19 文献标志码:A

doi:10.7538/hhx.2014.36.S0.0090

文章编号:0253-9950(2014)S0-0090-08

Comparison and Analysis of Three Methods for Numerical Solution of Droplet Breakage Equation

WANG Ri-teng, LI Chun-hui, JIAO Cai-shan*

Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

Abstract: Three methods for numerical solution of droplet breakage equation (PBE) under the population balance concept in batch system are introduced: fixed pivot technique(FPT), method developed by Attarakih (MDA), cell averaged technique (CAT). Differences and accuracies are also discussed. For overcoming the significant deviation of number density in the left boundary of FPT, a slight modification is recommended, and the numerical results show good agreement with analytical solution. All of numerical solutions for differential equations set are approached by fourth-order Runge-Kutta method, and the algorithms are programmed by C programming language. The numerical results show that the FPT and MDA have almost the same accuracy under large interval width, while the CAT is of better accuracy and efficiency, which show a prosperous future in solving the simultaneous breakage and aggregation equations. However, all of the three methods show steady and solid results even after a relatively long processing time.

Key words: population balance; droplet breakage; numerical solution

收稿日期:2014-10-08;修订日期:2014-11-15

作者简介:王日腾(1987一),男,山东烟台招远人,硕士研究生,乏燃料后处理专业

^{*}通信联系人:矫彩山(1964-),男,黑龙江哈尔滨巴彦人,教授,核燃料循环与材料专业, E-mail: jiaocaishan@163.com

群体平衡模型在研究化工过程方面有着广泛的应用。对于结晶、高分子降解、气象学、液-液以及气-液传质等过程的模拟,该模型是较为理想的选择。而对于核化工中普遍应用的液液萃取设备,如脉冲萃取柱、混合澄清槽,由于其内部的液-液分散体系十分复杂,其理论研究一直是化工学科的难点,而群体平衡模型是处理这一体系的最常用的方法^[1-2],然而由于源项中积分项的存在,得到群体平衡方程的解析解极为困难^[3]。

近 20 年来,研究人员在方程的数值求解方面 做了大量工作。其中,Kumar 和 Ramkrishna 提 出的固定点法^[4]和移动点法(moving pivot technique)^[5]最为经典也应用最广泛。该方法得到的 离散方程理论上可以保证粒子的任意阶矩(液滴 群整体特性)的守恒,同时该方程应用不受具体破 碎、聚合的物理模型的限制,可以模拟任意情况下 液滴的破碎、聚合行为。Attarakih^[6]在求解破碎 方程时,在固定点法的基础上提出守恒方法与固 定点法有相同的计算精度。Kumar^[7]为了改进固 定点法在求解聚合方程中的过度预测问题,提出 了单元平均法。Kumar^[8]、Kostoglou^[9]将该方法 扩展应用到破碎方程的求解,得到的数值结果比 前两种方法有更高的精度。

在破碎方程解析解探讨方面,Zff 和 McGrady^[10] 通过对高分子降解过程的模拟研究提出了连续破 碎方程在三种特殊破碎率情况下的解析解。 Ziff^[11]通过统计方法得出了任意破碎率和初始条件下离散方程的解析解。对于聚合方程求解, Scott^[12]和 Aldous^[13]在特殊聚合率的条件下提出 了连续方程和离散方程的解析解。Kumar^[14-15]列 出了破碎、聚合同时存在时方程的解析解。

虽然液滴破碎方程和聚合方程的解析解,只 有在特殊的情况下才存在,然而这几种情况下的 解析解为数值解的对比以及验证提供帮助。

1 液滴破碎方程及离散

液滴破碎方程的连续形式可表述为:

$$\frac{\partial n(v,t)}{\partial t} = -\Gamma(v)n(v,t) + \int_{v}^{\infty} \beta(v,v')\Gamma(v')n(v',t) dv'$$
(1)

式中,n(v,t)为t时刻、体积为v的粒子数密度; $\Gamma(v)$ 为体积v液滴的破碎频率; $\beta(v,v')$ 表示体积 v'的液滴破碎生成体积为v的液滴的概率。

1.1 粒子连续系统的离散

从数学角度出发,粒子体积可以连续的分布 在 0 到 ∞ 。为了能够通过计算机进行数值计算, 需要将此连续分布划分成有限连续子区间,如 $[v_0, v_1), [v_1, v_2), \dots, [v_{M-1}, v_M], 其中 v_0 = 0,$ $v_1 = v_{\min}, v_M = v_{\max}, M$ 为子区间的个数。定义 x_i $(i=0, 1, 2, \dots, M-1)$ 为每个子区间的代表性 体积, I_i 代表区间 $[v_i, v_{i+1})$,如图 1 所示。





Fig. 1 Discretization of continuous droplet volume distribution

本工作中,对于 vi 的确定采用固定的几何网格确定:

$$v_i = \sigma^{i-1} v_{\min} \quad (i = 1, 2, \cdots, M)$$
(2)

也即 $v_{i+1} = \sigma v_i, \sigma$ 为比例常数,当 σ, v_{\min} 和M确定时, v_{\max} 也随之确定。

*x_i*理论上可以在区间[*v_i*,*v_{i+1})的任意位置。 在很多文献中 <i>x_i* 选为区间[*v_i*,*v_{i+1})的几何中点, 计算如式(3)。*

$$x_i = \frac{v_i + v_{i+1}}{2}$$
(3)

本工作在计算过程中选取了如式(4)积分中 值的形式:

$$x_{i} = \frac{\int_{v_{i}}^{v_{i+1}} vn(v,0) dv}{\int_{v_{i}}^{v_{i+1}} n(v,0) dv}$$
(4)

式中,n(v,0)表示初始时刻体积为v的液滴的粒

子数密度。

1.2 破碎方程的离散

在对连续方程(1)进行离散之前,先定义如下 变量:

$$M_{u} = \int_{0}^{\infty} v^{u} n(v,t) \,\mathrm{d}v \tag{5}$$

式中, M_u 为数密度n(v,t)的u阶矩。0阶矩表示 液滴总数,1阶矩表示液滴总体积。

$$N_{i}(t) = \int_{v_{i}}^{v_{i+1}} n(v,t) \,\mathrm{d}v$$
 (6)

 $N_i(t)$ 为区间 $[v_i, v_{i+1})$ 内液滴总个数。

$$\overline{n_i}(v,t) = \frac{N_i(t)}{v_{i+1} - v_i} \tag{7}$$

式中, $\overline{n_i}(v,t)$ 为区间 I_i 的平均数密度。

离散方程对数密度的求解是通过求解子区间 上液滴总数 $N_i(t)$,然后通过该区间的平均数密 度 $\overline{n_i}(v,t)$ 作为该代表性尺寸 x_i 的数密度值,即:

$$n(x_i,t) \approx \overline{n_i}(v,t) \tag{8}$$

由此可知区间 I_i 上任一液滴的数密度均用 $\overline{n_i}(v,t)$ 代替。

下面介绍的连续方程三种离散方法,每种方法理论上均可以保证数密度任意阶矩守恒,根据 不同矩的守恒特性可以得到不同的方程离散形式。在本工作中,只研究前两阶矩(0阶矩和1阶矩,分别对应于离粒子的数量和体积)守恒的前提 下离散方程的求解。

1) 固定点法(FPT)

固定点法的基本思想如下:

(1) 若体积为 x_k ($k=1, 2, \dots, M$)的液滴 破碎产生的子液滴恰好为某一区间的代表性体积 x_i ($i=1, 2, \dots, k$),则该子液滴完全属于区间 I_i ;

(2) 若子液滴体积 v 不等于任一 x_i,且 v∈ (x_{i-1},x_i),则将其分配到相邻的两个区间 I_{i-1}和 I_i中(两阶矩守恒分配到相邻两个区间中,三阶矩 守恒分配到相邻的三个区间中,依此类推),分配 示意图示于图 2。

分配比例按下述方程求解:

$$a+b=1\tag{9}$$

$$ax_{i-1} + bx_i = v \tag{10}$$

式中,a 为该子液滴分配到区间 I_{i-1} 中的个数百 分数,b 为分配到区间 I_i 中的百分数。由上两式 可得:

$$a = \frac{x_i - v}{x_i - x_{i-1}}, b = \frac{v - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

基于 1.1 节对粒子系统的离散理论和上述守





恒分析,在保证数密度前两阶矩守恒的前提下,方 程(1)可得到如下的离散形式:

$$\frac{\mathrm{d}N_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\Gamma(x_i)N_i(t) + \sum_{k=i}^M n_{i,k}\Gamma(x_k)N_k(t)$$
(11)

由式(1)到式(11)的推导过程见文献[4]。其中:

$$n_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - v}{x_{i+1} - x_i} \beta(v, x_k) dv + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{v - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \beta(v, x_k) dv$$
(12)
当 *i*=*k* 时,第一项积分为 0;

当i=1时,第二项积分为0。

2) Attarakih 2004 法

Attarakih 等^[6] 在破碎方程中引入了两个辅助函数: $\eta(v)$ 和 $\sigma(v)$ 。在保证数密度前两阶矩守恒的前提下,可以得到如下离散方程:

$$\frac{\mathrm{d}N_{i}(t)}{\mathrm{d}t} = -\eta(x_{i})\Gamma(x_{i})N_{i}(t) + \sum_{k=i}^{M} \{\sigma(x_{k})\Gamma(x_{k})N_{k}(t) \times \int_{v}^{\min(x_{k},v_{i+1})} \beta(v,x_{k})\}\mathrm{d}v$$
(13)

其中:

$$\sigma(x_i) = \frac{\vartheta(x_i) - 1}{\vartheta(x_i) - r_2(x_i)}$$
(14)

$$\eta(x_i) = \sigma(x_i) r_2(x_i) \tag{15}$$

$$r_{2}(x_{i}) = \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{x_{k}}{x_{i}}\right) \int_{v_{k}}^{\min(x_{i}, v_{k+1})} \beta(v, x_{i}) dv$$
(16)

式中, $\vartheta(x_i)$ 表示体积为 x_i 的液滴破碎产生子液 滴的平均个数,在本文模拟的破碎过程中都假设 为二元破碎,即 $\vartheta(x_i)=2.0;\sigma(x)$ 和 $\eta(x)$ 为辅助 函数; $r_2(x)$ 为中间变量,具体表达式的推导参考 文献[6]。

该方法是加权残值(weighted residual)的一种,是二级域法(subdomain method)的改进形式。二级域法得到的离散方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}N_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\Gamma(x_i)N_i(t) + \sum_{k}^{M}\Gamma(x_k)N_k(t)\int_{v_i}^{\min(x_k,v_{i+1})}\beta(v,x_k)\mathrm{d}v \quad (17)$$

对比式(17)与式(12)的积分区间得知,此种算法 对区间 *I*,液滴数目有影响的区域只限于本区间 内液滴的破碎、聚合,即相邻两区域之间不存在液 滴的分配问题。由 1)节固定点关于矩守恒的基 本思想可以推知,该二级域法只能保证一个积分 特性守恒。文献[3]中 Attarakih 通过数学分析 验证了此法只能保证 0 阶矩守恒。

为了使该方法能保证任意两种积分特性守恒,Attarakih等^[6]通过对破碎产生项、破碎消失项分别引入了两个辅助函数,得到式(13)常微分方程组。

3) 单元平均法(CAT)

Kumar 等^[7]为了解决固定点技术在求解聚 合方程时的过度预测问题,提出了单元平均法,该 方法很好地保留了固定点法通用性好、计算稳定 的优点。Kumar 等^[8]和Kostoglou 等^[9]将此方法 扩展应用到破碎方程的求解中,得到的离散方程 表达式如下:

 $\frac{\mathrm{d}N_i(t)}{\mathrm{d}t} = B_{i-1}\lambda_i^-(\overline{\alpha}_{i-1})H(\overline{\alpha}_{i-1}-x_{i-1}) +$

 $B_{i\lambda_{i}^{-}}(\bar{a}_{i})H(x_{i}-\bar{a}_{i})+B_{i\lambda_{i}^{+}}(\bar{a}_{i})H(\bar{a}_{i}-x_{i})+$ $B_{i+1\lambda_{i}^{+}}(\bar{a}_{i+1})H(x_{i+1}-\bar{a}_{i+1})-\Gamma(x_{i})N_{i}(t)$ (18) 方程右端前四项分别为破碎产生液滴的平均体积 \bar{a} 在区间 $[x_{i-1},v_{i})$ 、 $[v_{i},x_{i})$ 、 $[x_{i},v_{i+1})$ 和 $[v_{i+1},x_{i+1})$ 时被分配到区间 I_{i} 的数目。最后一项为区 域 I_{i} 内的液滴破碎消失项。当 i=1时, $B_{0}=0$; i=M时, $B_{M+1}=0$ 。

上式中,*H*(*x*)为海维赛德阶跃函数,定义如式(19):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
(19)

从相邻两区域分配到区域 *I* 内的相对权值 (个数百分数)计算如下:

$$\lambda_i^{-}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \lambda_i^{+} = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad (20)$$

单位时间内由于破碎产生进入区间 *I*_i 内的 液滴数:

$$B_i = \sum_{j=i}^{M} p_{i,j}^0 \Gamma(x_j) N_j$$
(21)

与之相对应的进入区间 Ii 内的液滴体积为:

$$R_{i} = \sum_{j=i}^{M} p_{i,j}^{(1)} \Gamma(x_{j}) N_{j}$$
(22)

式(21)和(22)中的 $p_{i,j}^{(k)}(k=0,1)$ 定义为:

$$p_{i,j}^{(k)} = \int_{v_i}^{v_{i+1}} x^k \beta(x, x_j) dx$$
 (23)

进入区间 Ii 内的液滴平均体积:

$$\bar{\alpha}_i = \frac{R_i}{B_i} \tag{24}$$

Kostoglou^[16]提出扩展的单元平均法(extended cell average technique, ECAT),可以保证 在计算过程中任意矩的守恒。单元平均法与固定 点法的不同点在于:固定点法对于破碎后产生的 每一个体积为 $v(v \neq x_i)$ 的液滴,都分配到两个相 邻的区间中,对于区间 I_i 有贡献的液滴体积只能 位于区间(x_{i-1}, x_{i+1})中。而单元平均法是将某 一区间内破碎产生的所有液滴求得体积平均值, 如式(24),若此平均值 \bar{a} 位于区间(x_{i-1}, x_{i+1})中。 则对其采取与固定点法相同的分配方式(式(9、 10)),分配示意图示于图 3。此种方法对于区间 I_i 有贡献,液滴体积可以分布在[v_{i-1}, v_{i+2})三个 区间中,示意图示于图 4。



2 数值算法及结果分析

破碎方程的连续形式(式(1))在特殊初始条件、破碎率模型和子液滴分布的情况下存在解析解,Scott^[12]对方程解析解的求解有详细的推导过

程。几种特殊情况下解析解的存在为数值计算的 准确与否提供了很好的对比验证。在本工作中, 选取的相关模型及相应的解析解见表 1, 破碎假 设为二元破碎。

T 11 1	D 1 1	1 1	1	1 . 1	1 .	
lable l	Related	models	and	analytical	solution	expression

模型	eta(v,v')子分布	Γ(v)破碎率	n(v,0)初始分布	n(v,t)解析解
(Model)	(Droplet distribution function)	(Breakage frequency)	(Initial distribution)	(Analytical solution)
表达式(Expression)	2/v'	υ	e ^{-v}	$(1+t)^2 e^{-v(1+t)}$

微分方程组(式(11)、式(13)、式(18))的数值 求解采用定步长的四阶龙格-库塔法,数值积分采 用变步长梯形求积分法。

2.1 固定点法

固定点法由于其通用性、稳定性,是目前求解 破碎方程时应用最广的方法之一,其能很好地预 测数密度的前二阶矩。在很多文献中 x; 的初始 化采用式(3)几何中点计算,图 5 对比了在 $\sigma=$ 3.0的情况下,分别采用式(3)和(4)初始化 x_i 所 得到的结果与解析解对比。由图 5 可以看出,采 用积分中值式(4)对 x; 进行初始化后得到的数密 度n(v,t)分布要比式(3)更接近于解析解。因 此,本工作在后续的计算过程中,均采用式(4)对 x_i 进行初始化。由图 5(a)可以看出,Kumar 等^[5] 提出的固定点法得到第一个区间的数密度值有突 变现象,这主要是由于式(12)在计算 i=1 时,第 二项积分假设为 0,即忽略了区间[v₁,x₁)内子液 滴对区间 I₁ 的数量贡献,导致计算值比真实值要 小,由图 5(a)可以看出第一个点的值远低于曲 线的平滑部分。为此,本工作对式(12)在i=1时 进行了修正,将第二项积分值修改为:

$$\int_{v_1}^{x_1} \frac{v - x_0}{x_1 - x_0} \beta(v, x_k) dv = \int_{v_1}^{x_1} \frac{v - \frac{v_1}{2}}{x_1 - \frac{v_1}{2}} \beta(v, x_k) dv$$

 x_0 为区间[v_0 , v_1)的积分中值,因 $v_1 = v_{\min}$ 值较 小,此时积分中值与几何中点值几乎完全相等,为 了便于数值积分的计算,在此令 $x_0 = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2}$,代入式(25)可得:

$$\int_{v_1}^{x_1} \frac{v - x_0}{x_1 - x_0} \beta(v, x_k) dv = \int_{v_1}^{x_1} \frac{v - \frac{v_1}{2}}{x_1 - \frac{v_1}{2}} \beta(v, x_k) dv$$

(26)

(25)

图 5(b)为 σ =3.0、t=6.0 s时,方程修改后的计 算结果,可以看出曲线在第一个区间的数密度突 变现象消失了,说明对式(12)在 i=1 时的修正是 合理、有效的。为此,在本工作后续的固定点计算 方法中,都将采用对式(12)修改后的方程。



Fig. 5 Number density comparison between before(a) and after(b) modification at $\sigma = 3.0$

由图 5(a)、(b)的结果可以看出, σ =3.0时 数值解与解析解偏离较大,这主要是由于在液 滴体积初始化时,区间宽度太大所致。由式(3) 知区间 I_i 的宽度 $\Delta v_i = (\sigma - 1) v_i$, σ 值越小,区间 I_i 的宽度越小,则该区间代表性尺寸 x_i 越接近 真实值,数值解所得到的平均数密度与点 x_i 的 数密度越接近,即 $\sigma \rightarrow 1$ 时,式(8)应为 $\bar{n}_i(v,t) =$ $n(x_i,t)$ 。

图 5(b)和图 6 对比分析了 σ = 3.0 和 σ = 1.5,*t* = 6.0 s 时数密度 n(v,t)的分布情况,验证了上述说法。

图 7 分析了两种区间宽度情况下液滴总数密度(即 n(v,t)的 0 阶矩)随时间变化,可知液滴总数 随着时间的增加破碎产生的液滴总数也随之增加。

2.2 Attarakih 2004 法

图 8 (a、b) 对 比 了 固 定 点 法 和 Attarakih 2004法两种数值算法在 σ =1.5和 σ =3.0、t=

6.0 s时各子区间液滴数密度。由图 8 可以看出,两种算法得到的值几乎完全吻合。同时,对 比可知 Attarakih 2004 法的计算精度也受区间 宽度 σ 的影响。





2.3 单元平均法

在 2.2 节的分析中已知固定点法与 Attarakih 2004 法求得的数值解几乎是完全重合的,为 了便于对比,在此只对单元平均法、Attarakih 2004 法和解析解之间的计算结果进行比较。 由于在计算过程中 σ =3.0 时,对于单元平均 法而言区间宽度过大,计算过程中产生数密度 n(v,t)为负值的情况,所以在此适当缩小了区 间宽度。

图 9 为 σ=2.3 和 σ=1.5、t=6.0 s 时两种数

值算法得到的数密度与解析解比较,由计算结果 可以看出,在网格宽度较大时,Attarakih 2004 法 得到的结果精度要比单元平均法低很多。对比 图 9(a、b)可知,单元平均法即使在区间宽度比较 大的情况下计算结果仍与解析解吻合的很好。增 大网格宽度可以降低计算量,因此从效率角度考 虑单元平均法在保证计算精度的情况下有很高的 计算效率。然而,在数密度变化比较明显的地方, 即使是单元平均法,小区间宽度得到的计算结果 精度比大区间宽度有明显地提高。



 — 解析解(Analytical solution),● — 单元平均法数值解(Numerical solution by CAT)
 ▲
 — Attarakih 2004 数值解(Numerical solution by Attarakih 2004)
 图 9 σ=2.3(a),σ=1.5(b)时数密度 n(v,t)分布
 Fig. 9 Number density n(v,t) at σ=2.3(a) and σ=1.5(b)

3 结 论

(1) 缩小区间宽度可以明显地提高计算精度。

(2) 在相同区间宽度(σ值相等)情况下,单元平均法计算精度、效率要比固定点法和 Attarakih2004 法高。

(3)固定点法对于第一区间液滴的归属分配 过于粗糙,修改后的分配方法明显地提高了计算 精度。

(4)单元平均法是为了解决固定点法在求解 聚合方程时的过度预测问题而发明的,然而其也 能很好地应用到破碎方程的求解中。因此,在求 解液滴破碎、聚合行为同时存在的问题时,该方法 有很好地应用前景。

参考文献:

[1] 李少伟,景山,张琦,等.萃取柱内液-液两相流 CFD-PBM 模拟研究进展[J].过程工程学报,2012,12
 (4):702-711.

- [2] 顾兆林,苏军伟,李云,等.两相及多相体系的离散 行为与群体平衡模型[J].化学反应工程与工艺, 2007,23(2):162-167.
- [3] 苏军伟,顾兆林,XU X Yun. 离散相系统群体平衡 模型的求解算法[J]. 中国科学:化学,2010,40(2): 144-160.
- [4] Kumar S, Ramkrishna D. On the solution of population balance equations by discretization I: a fixed pivot technique[J]. Chem Eng Sci, 1996, 51(8): 1311-1332.
- [5] Kumar S, Ramkrishna D. On the solution of population balance equations by discretization II : a moving pivot[J]. Chem Eng Sci, 1996, 51(8): 1333-1342.
- [6] Attarakih M M, Bart H-J, Faqir N M. Solution of the droplet breakage equation for interacting liquidliquid dispersions: a conservative discretization approach[J]. Chem Eng Sci, 2004, 59: 2547-2565.
- [7] Kumar J, Peglow M, Warneck G, et al. Improved accuracy and convergence of discretized population balance for aggregation. the cell average technique[J]. Chem

Eng Sci, 2006, 61: 3327-3342.

- [8] Kumar J, Peglow M, Warneck G, et al. An efficient numerical technique for solving population balance equation involving aggregation, breakage, growth and nucleation[J]. Powder Technol, 2008, 182: 81-104.
- [9] Kostoglou M, Karabelas A J. On sectional techniques for the solution of the breakage equation[J]. Comput Chem Eng, 2009, 33: 112-121.
- [10] Ziff R M, McGrady E D. The kinetic of cluster fragmentation and depolymerisation[J]. J Phys A: Math Gen, 1985, 18: 3027-3037.
- [11] Ziff R M. New solutions to the fragmentation equation[J]. J Phys A: Math Gen, 1991, 24: 2821-2828.
- [12] Scott W T. Analytical studies in cloud droplet coa-

lescence I[J]. J Atmos Sci, 1968, 25: 54-65.

- [13] Aldous D J. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation): a review of the mean-field theory for probabilities[J]. Bernoulli, 1999, 5(1): 3-48.
- [14] Kumar J, Warneck G. Convergence analysis of sectional methods for solving breakage population balance equation I: the fixed pivot technique[J]. Numerische Math, 2008, 111: 81-108.
- [15] Kumar J, Warneck G. Convergence analysis of sectional methods for solving breakage population balance equations II: the cell average technique [J]. Numerische Math, 2008, 110: 539-559.
- [16] Kostoglou M. Extended cell average technique for the solution of coagulation equation [J]. J Colloid Interface Sci, 2007, 306: 72-81.